③ التعامد في الفراغ:

- يتعامد شعاعان غير صفريين إذا كان جداؤهما السلّمي معدوماً
- في معلم متجانس، إذا كان:

$\vec{v}(x', y', z')$, $\vec{u}(x, y, z)$ فإن:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ متعامدان $\Leftrightarrow$ $x x' + y y' + z z' = 0$

تدريب (1):

عيّن العدد الحقيقي a كي يتعامد الشعاعان

$\vec{v}\left(-1 , \sqrt{2}+1 , -2\right)$, $\vec{u}\left(a , \sqrt{2}-1 , 3\right)$

تدريب (2):

مستقيم Δ شعاع توجيهه: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

أثبت أن Δ عمودي على المستقيم (AB) حيث:

$A(3, 2, -1)$, $B(-1, -1, 4)$

تدريب (3):

إذا علمت أنّ $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 13$, $\|\vec{v}\| = 12$, $\|\vec{u}\| = 5$

أثبت أن $\vec{u}$, $\vec{v}$ متعامدان.

④ المعادلة الديكارتية لمستوٍ:

مبرهنة: في معلم متجانس:

❶. لكل مستوٍ $\mathcal{P}$ معادلة ديكارتية من الشكل:

$$a x + b y + c z + d = 0$$

حيث الأعداد: a و b و c ليست جميعها معدومة،

عندها يكون $\vec{n}(a , b , c)$ شعاعاً ناظماً على $\mathcal{P}$

❷. و بالعكس، إذا أعطيت الأعداد: a و b و c و d

و لم تكن a و b و c جميعها معدومة، فإن مجموعة النقط $M(x , y , z)$ التي تحقق $a x + b y + c z + d = 0$

هي مستوٍ يقبل $\vec{n}(a , b , c)$ شعاعاً ناظماً

مبرهنة: في معلم متجانس، لتكن:

$a x + b y + c z + d = 0$ معادلة المستوي $\mathcal{P}$

عندئذ يُعطى بُعد النقطة $M_0(x_0 , y_0 , z_0)$ عن المستوي $\mathcal{P}$

بالعلاقة: $dist\left(M_0 , \mathcal{P}\right) = \dfrac{\left|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

الوضع النسبي لمستويين:

- $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ المستويان $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ متوازيان.
- $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً $\Leftrightarrow$ المستويان متقاطعان.
- $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ $\Leftrightarrow$ المستويان $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ متعامدان.

تدريب (1):

تحقق من توازي المستويين الآتيين و احسب البعد بينهما:

$\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + z - 1 = 0$

$\mathcal{P}_2 : -4x + 6y - 2z + 7 = 0$

تدريب (2):

اكتب معادلةً للمستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطة $B(3 , -1 , 2)$

موازياً للمستوي: $\mathcal{P}' : -x + 4y - 5z + 1 = 0$

تدريب (3):

في معلم متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ لدينا النقاط:

$C(-2, 3, 0)$, $B(2, 1, 5)$, $A(3, -1, 4)$

❶. أثبت أنها ليست على استقامة واحدة.

❷. أثبت أن المستقيم (HQ) عمودي على المستوي (ABC)

حيث $H(-1 , -2 , 3)$, $Q(3, 1, 1)$